दीपक प्रकाशन

एप्लाइड गणित

प्रथम

डॉ. के. आर. चौबे
डॉ.एच.बी. पाण्डेय

Scanned with OKEN Scanner

विषय-सूची

अध्याय		पृष्ठ संख्या
	बीजगणित	
1.	अनुक्रम एवं श्रेणी	1—6
2.	समान्तर श्रेणी	7—24
3.	गुणोत्तर श्रेणी	25—49
4.	हरात्मक श्रेणी	50—66
5.	समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी	67—72
6.	क्रमचय	73—83
7.	संचय	84—94
8.	द्विपद प्रमेय	95—113
9.	चरघातांकी श्रेणी	114—127
10.	लघुगणकीय श्रेणी	128—139
11.	आंशिक भिन्नें	140—150
12.	सारणिक	151—171
13.	मध्यमान एवं मध्य मूल मान	172—194
	त्रिकोणमिति	
14.	अपवर्त्य और अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात	195—218
15.	त्रिकोणमितीय समीकरण	219—239
16.	त्रिभुज के प्रगुण और त्रिभुज निर्धारण	240—263
17.	दि मॉइवर्स प्रमेय	264—279
	सांख्यिकी	
18.	सांख्यिकीय विधियाँ	280—291
19.	केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप	292—328
20.	अपकिरण की मापें	329—343
	आव्यूह	
21.	प्रायिकता	344—355
22.	आव्यूह	356—377
23.	विशेष आव्यूह	378—404

Scanned with OKEN Scanner

1 अनुक्रम एवं श्रेणी
(SEQUENCE AND SERIES)

1·1. अनुक्रम

संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय जिसमें संख्याएँ एक निश्चित क्रम मे रखी गई हों और वह एक निश्चित नियम का पालन करता हो अनुक्रम कहलाता है तथा अनुक्रम के अवयव उसके पद कहलाते हैं।

उदाहरण :

(1) $1, 3, 5, 7, \ldots\ldots, (2n-1), \ldots.$

(2) $3, 6, 9, 12, \ldots\ldots, 3n, \ldots\ldots$

(3) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots$

(4) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots$

1·2. श्रेणी

अनुक्रम के पदों को यदि योग के रूप में लिख दिया जाय तो वह श्रेणी कहलाने लगती है।

उदाहरण :

(1) $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n+\ldots.$

(2) $2+5+8+11+\ldots.;\ -2-5-8-11-\ldots.$

1·3. अनुक्रम तथा श्रेणी के प्रकार

अनुक्रम और श्रेणियों के कई प्रकार हैं। बहुत से हमारे पाठ्यक्रम के बाहर हैं। यहाँ हम केवल पाठ्यक्रम के अन्तर्गत अनुक्रमों और श्रेणियों का अध्ययन करेंगे।

समान्तर अनुक्रम :

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots.$$

समान्तर श्रेणी :

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots.$$

गुणोत्तर अनुक्रम :

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3, \ldots\ldots, ar^{n-1}$$

गुणोत्तर श्रेणी :

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ldots.+ar^{n-1}+\ldots.$$

हरात्मक अनुक्रम :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots., \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

हल 4. प्रथम पद $=1$

द्वितीय पद $=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

तृतीय पद $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^2}$

चतुर्थ पद $=\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^3}$

पाँचवा पद $=\frac{1}{3^3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^4}$

छठा पद $=\frac{1}{3^4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^5}$

सातवाँ पद $=\frac{1}{3^5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^6}$

आठवाँ पद $=\frac{1}{3^6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^7}$

अतः दी हुई श्रेणी के अगले चार पद $\frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{3^6}, \frac{1}{3^7}$ हैं।

पाँचवा प्रश्न छात्र स्वयं करें।

उन श्रेणियों के प्रथम पाँच पद लिखो जिनके व्यापक पद दिये हैं :

(i) 1^n (ii) $(-1)^n$ (iii) $1+\frac{1}{n}$ (iv) $\frac{1}{n^2}$

(v) $\frac{n^2}{3^n}$ (vi) $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ (vii) n^3+1 (viii) n^2+1

उत्तर : (i) 1, 1, 1, 1, 1 (ii) $-1, 1, -1, 1, -1$

(iii) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$ (iv) $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}$

(v) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \frac{25}{243}$ (vi) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}$

(vii) 2, 9, 28, 65, 126 (viii) 2, 5, 10, 17, 26

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित अनुक्रमों के पाँचवें तथा nवें पद लिखो :

(i) 3, 8, 13, 18,....

(ii) 11, 7, 3, -1,........

(iii) $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{16}$,.....

(iv) 1, 2, 4, 8,....

(v) 4, 7, 10, 13,........

(vi) $4, \frac{11}{2}, 7, \frac{17}{2}$, ...

(vii) $6, \frac{16}{3}, \frac{14}{3}, 4$,........

[उत्तर : (i) 23, $5n-2$, (ii) -5, $15-4n$

(iii) $\frac{-1}{32}, \frac{-1}{2^n}$ (iv) 16, 2^{n-1}

(v) 16, $3n+1$ (vi) 10, $\frac{3n+5}{2}$

(vii) $\frac{10}{3}, \frac{20-2n}{3}$]

2. श्रेणी $8+2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}+$....का 10 वाँ पद ज्ञात करो। [उत्तर : $\frac{8}{19}$]

3. श्रेणी $\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ में दोनों ओर एक-एक पद द्वारा विस्तार करो।

[उत्तर : 1, $\frac{3}{7}$]

4. श्रेणी $1-3+9-27+$....का nवाँ पद ज्ञात करो।

[उत्तर : $(-3)^{n-1}$]

5. श्रेणी $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+$....का nवाँ पद ज्ञात करो।

[उत्तर : $1^2+2^2+3^2+....+n^2$]

6. श्रेणी $1+(1+2)+(1+2+3)+$....का nवाँ पद ज्ञात करो।

[उत्तर : $1+2+3+....+n$]

7. अनुक्रम 96, 48, 24, 12,...., $\frac{3}{16}$ में पदों की संख्या बताओ।

[उत्तर : 10]

8. यदि अनुक्रम a_0, a_1, a_2, a_3,....को प्रतिबन्ध $a_n{}^2-a_{n-1}a_{n+1}=(-1)^n$ सन्तुष्ट करता है तो a_3 का मान ज्ञात करो यदि $a_0=1$ और $a_1=3$ दिया है। [उत्तर : 33]

Scanned with OKEN Scanner

12 सारणिक

[DETERMINANTS]

12·1 परिभाषाएँ

निम्न दो युगपत् समीकरणों पर विचार करें

$$a_1x+b_1y=0 \qquad \text{....(1)}$$

$$a_2x+b_2y=0 \qquad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) व (2) के x, y का विलोपन करने के लिए समी० (1) से

$$\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1} \qquad \text{....(3)}$$

तथा समी० (2) से $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{b_2}{a_2}$ ....(4)

अतः $\dfrac{x}{y}$ के दोनों मानों को बराबर रखने पर

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$$

या $$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$$

या $$a_1b_2-a_2b_1=0$$

इसे हम निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

अतः स्पष्ट है कि, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2=a_2b_1$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ जैसे निरूपण को हम सारणिक कहते हैं।

Scanned with OKEN Scanner

इसमें दो पंक्तियाँ तथा दो स्तम्भ होते हैं। इसे द्वितीय क्रम या द्वितीय कोटि का सारणिक कहते हैं।

पुनः तीन युगपत् समीकरणों पर विचार करें—

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad \ldots(5)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad \ldots(6)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0 \quad \ldots(7)$$

इन समीकरणों से x, y, z का विलोपन करने के लिए समीकरण (6) और (7) से वज्रगुणन की रीति से,

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{a_3c_2-a_2c_3}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}=K$$

$$\therefore \quad x=K(b_2c_3-b_3c_2)$$
$$y=K(a_3c_2-a_2c_3)$$
$$z=K(a_2b_3-a_3b_2)$$

जहाँ $K\neq 0$

x, y, z के इन मानों को समी॰ (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$K[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(a_3c_2-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)]=0$$

या $$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(a_3c_2-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0 \quad \ldots(8)$$

समीकरण (8) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \ldots(9)$$

इसे हम तृतीय कोटि का सारणिक कहेंगे क्योंकि इसमें 3 पंक्तियाँ हैं तथा 3 स्तम्भ हैं।

इसी प्रकार n कोटि के सारणिक में n पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

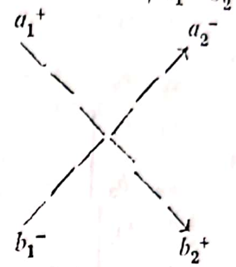
यह n कोटि का सारणिक है।

अतः एक सारणिक विशेष सूक्ष्म रूप में लिखा गया एक विशेष प्रकार का व्यंजक है।

एक सारणिक को प्रायः D या $\triangle$ से निरूपित करते हैं।

12·2. प्रसार

व्यंजक $a_1b_2-a_2b_1$ को सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ का प्रसार कहते हैं।



इस सारणिक के प्रसार को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

सारणिक का मान = धन चिन्ह वाले तीर के अवयवों का गुणनफल — ऋण चिन्ह वाले तीर के अवयवों का गुणनफल।

12·3. उपसारणिक और सहखण्ड

हम जानते हैं कि

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1$$

जहाँ $A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_2c_3-b_3c_2$ अवयव a_1 का उपसारणिक कहलाता है।

$B_1=\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_2c_3-c_2a_3$ अवयव b_1 का उपसारणिक कहलाता है।

तथा $C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$ अवयव c_1 का उपसारणिक कहलाता है।

अतः किसी अवयव का उपसारणिक वह सारणिक है जिसे हम इस अवयव वाली पंक्ति तथा स्तम्भ को छोड़ने पर प्राप्त करते हैं।

तृतीय क्रम के सारणिक के प्रसार में प्रथम पंक्ति के प्रत्येक अवयव को उनके संगत उपसारणिकों से गुणा किया जाता है तथा गुणनफलों से पहले एकान्तरतः क्रमशः धन व ऋण के चिन्ह लगाए जाते हैं।

Scanned with OKEN Scanner

इस आधार पर

a_2 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b_2 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c_2 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

a_3 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

b_3 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

c_3 का उपसारणिक $=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

यदि प्रथम पंक्ति के अवयवों के पदों में सारणिक का प्रसार करते समय स्तम्भों के चक्रीय क्रम को ध्यान में रखा जाय तो सभी पद धन चिन्ह के होंगे। इस प्रकार

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1A'_1 + b_1B'_1 + c_1C'_1$$

यहाँ A'_1, B'_1, C'_1, क्रमशः अवयवों a_1, b_1, c_1 के सहखण्ड हैं।

12·4. उपसारणिक तथा सहखण्ड में सम्बन्ध

यदि कोई अवयव ith पंक्ति तथा jth स्तम्भ में स्थित है तो उस अवयव का सहखण्ड $(-1)^{i+j} \times$ उस अवयव के उपसारणिक के बराबर होता है।

12·5 सारणिकों के प्रगुण

(1) यदि सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तब $\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

अब पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदल देने पर प्राप्त सारणिक Δ' है तब

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(c_1b_3 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$
$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$
$= \Delta$

2. यदि सारणिक की किन्हीं दो संलग्न पंक्तियों या स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान तो अपरिवर्तित रहता है किन्तु चिन्ह बदल जाता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तब $\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

माना प्रथम पंक्ति को द्वितीय पंक्ति में तथा द्वितीय पंक्ति को प्रथम पंक्ति में बदल देने पर प्राप्त सारणिक Δ' है तब

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$= a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_3c_1 - a_1c_3) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$
$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_3c_2 - a_2c_3) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$
$= -\Delta$

3. यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ या स्तम्भ समान हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

प्रथम व द्वितीय स्तम्भों को परिवर्तित करने पर प्राप्त सारणिक

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

परन्तु $\Delta' = -\Delta$

$\therefore \quad -\Delta = \Delta$ या $2\Delta = 0$

या $\Delta = 0$

4. यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तब $\Delta = 0(b_2c_3 - b_3c_2) + 0(a_3c_2 - a_2c_2) + 0(a_2b_3 - a_3b_2)$
$= 0$

SCIST. BOOK BANK

Scanned with OKEN Scanner

SC/ST. BOOK BANK

उदाहरण 2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करो।

हल : माना सारणिक Δ है, तब

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 15 & 29 & 14 \\ 3 & 16 & 19 & 17 \\ 8 & 33 & 39 & 38 \end{vmatrix}$$ तृतीय स्तम्भ को प्रथम स्थान पर लाने पर

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 25 & 6 \\ 3 & 7 & 13 & 5 \\ 8 & 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$ $(c_2-3c_1,\ c_3-2c_1,\ c_4-4c_1)$ द्वारा

$$= \begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$ R_1-R_3 द्वारा

$$= -2\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -2(7\times 6-9\times 5)=6$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$ $(c_2-c_1$ तथा c_3-c_1 द्वारा)

$$=(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)$$
$$=(b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)]$$
$$=(b-a)(c-a)(c-b)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}=0$

हल : $= \nabla \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & abcd \\ b & b^2 & b^3 & abcd \\ c & c^2 & c^3 & abcd \\ d & d^2 & d^3 & abcd \end{vmatrix}$$

यहाँ R_1 को a, R_2 को b से, R_3 को c से तथा R_4 को d से गुणा करने पर (द्वितीय सारणिक को)

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \frac{abcd}{abcd}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=0$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$ $R_1+R_2+R_3$ द्वारा

(ii) $\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$ [उत्तर : $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$]

3. निम्नलिखित को सिद्ध करो :

(i) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

(ii) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = -(ac-b^2)(ax^2+2bxy+cy^2)$

(iii) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2(3abc-a^3-b^3-c^3)$

(iv) $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2$

(v) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

(vi) $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

(vii) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

(viii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ix) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4\ (b+c)(c+a)(a+b)$

(x) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$

(xi) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

(xii) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ -5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2$

(xiii) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = x^3(x+10)$

4. सारणिक का मान ज्ञात करो $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ [उत्तर : 0]

5. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \dfrac{b^2+c^2}{a} & -a \\ b & b & \dfrac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = 4abc$$

6. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \sin A \cos A & \cos^2 A \\ \sin^2 B & \sin B \cos B & \cos^2 B \\ \sin^2 C & \sin C \cos C & \cos^2 C \end{vmatrix} = \sin (A-B) \sin (A-C) \sin (B-C)$$

जहाँ $A+B+C=\pi$.

7. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ac \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

8. सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2-(y-z)^2 & yz \\ y^2 & y^2-(z-x)^2 & zx \\ z^2 & z^2-(x-y)^2 & xy \end{vmatrix}$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

Scanned with OKEN Scanner

13 मध्यमान एवं वर्ग मध्य मूल मान

[MEAN AND ROOT MEAN SQUARE VALUE]

13·1 अनुक्रम

संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय जिसमें संख्याएँ एक निश्चित क्रम में रखी गई हों और वह एक निश्चित नियम का पालन करता हो, अनुक्रम कहलाता है तथा अनुक्रम के अवयव उसके पद कहलाते हैं।

उदाहरण—

(1) 1, 4, 9, 16, 25,....

(2) 1, 8, 27, 64, 125,....

(3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ अनुक्रम हैं।

13·2. श्रेणी

अनुक्रम के पदों को यदि योग के रूप में लिख दिया जाय तो वह श्रेणी कहलाने लगती है।

जैसे $u_1+u_2+u_3+....+....+u_n+....$

13·3. समान्तर श्रेणी

ऐसी श्रेणी जिसके किन्हीं भी दो लगातार पदों का अन्तर समान हो समान्तर श्रेणी कहलाती है।

उदाहरण के लिए 4+7+10+13+....समान्तर श्रेणी में है जिसका सार्वअन्तर 3 है।

समान्तर श्रेणी का सामान्य पद

यदि प्रथम पद $=a$ और सार्वअन्तर d हो तथा पदों की संख्या n हो तो nवाँ पद $=a+(n-1)d$.

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. श्रेणी 2, 5, 8, 11....का छठा और सोलहवाँ पद ज्ञात करो।

हल : $T_6=a+(6-1)d$

यहाँ $a=2, d=3$ तब

$T_6=2+5\times3$

$=2+15=17$

$$T_{16}=2+(16-1)\times3$$
$$=2+15\times3$$
$$=2+45$$
$$=47$$

उदाहरण 2. यदि 2K+3, 3K+1 और 5K+3 समान्तर श्रेणी में हैं, तो K का मान ज्ञात करो।

हल : $(3K+1)-(2K+3)=(5K+3)-(3K+1)$

या $K-2=2K+2$

$\therefore K=-4$

उदाहरण 3. किसी समान्तर श्रेणी का पाँचवाँ पद 11 तथा 9वाँ पद 7 है तो इसका 16वाँ पद ज्ञात करो।

हल : $T_5=a+4d=11$ ....(i)

$T_9=c+8d=7$ ....(ii)

घटाने पर $4d=-4$

$d=-1$

d का मान (i) में रखने पर

$a=11+4=15$

अतः श्रेणी है 15, 14, 13,....

$$T_{16}=15+(16-1)\times(-1)$$
$$=15+15(-1)$$
$$=15-15$$
$$=0$$

$\therefore$ 16वाँ पद शून्य है।

प्रश्नावली 13·1

1. कौनसा अनुक्रम समान्तर अनुक्रम में है?

(i) 1, 5, 9, 13,.... (ii) 1, 4, 6, 7,....

(iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ (iv), $\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{2}, ...$

[उत्तर : (i)]

2. निम्नलिखित श्रेणियों में कितने पद हैं?

(i) 4, 7, 10, 13, 16,....148 [उत्तर : 49]

(ii) 72, 70, 68, 66, 64,....40 [उत्तर : 17]

(iii) 5, 10, 15, 20, 25,....100 [उत्तर : 20]

3. यदि किसी स० श्रेणी का pवाँ पद q तथा qवाँ पद p है तो सिद्ध करो कि nवाँ पद $(p+q-n)$ है और इस प्रकार सिद्ध करो कि $(p+q)$वाँ पद शून्य है।

Scanned with OKEN Scanner

4. किसी समान्तर श्रेणी का nवाँ पद $\frac{1}{n}$ है और mवाँ पद $\frac{1}{m}$ है तो सिद्ध करो कि mn वाँ पद 1 है।

5. यदि किसी समान्तर श्रेणी का 12वाँ पद 17वें पद का दुगुना हो तो सिद्ध करो कि इसका छठा पद इसके 14वें पद का दुगुना होगा।

13·4. समान्तर श्रेणी के n पदों का योग

यदि a प्रथम पद, d सार्वअन्तर तथा n पदों की संख्या हो तो

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

उदाहरण 1. श्रेणी 11, 15, 19,....के 80 पदों का योग ज्ञात करो।

हल : यहाँ $a=11$, $d=4$, $n=80$

$$\therefore \quad S=\frac{80}{2}[2\times 11+(80-1)\times 4]$$
$$=80[11+158]$$
$$=08(169)$$
$$=13520$$

उदाहरण 2. समान्तर श्रेणी $-6, -2, 2,$....के 21 पदों का योग ज्ञात करो।

हल : यहाँ $a=-6$, $d=4$, $n=21$ तो

$$S=\frac{21}{2}[2\times(-6)+(21-1)\times 4]$$
$$=714$$

13·5. समान्तर माध्य

यदि तीन संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हैं तो श्रेणी का मध्य का पद शेष दो पदों का माध्य कहलाता है।

उदाहरण के लिए 4, 9, 14 समान्तर श्रेणी में हैं तो 9, 4 और 14 का माध्य है।

दो संख्याओं का समान्तर माध्य

यदि a और b दो संख्याएँ हैं तो

$$\text{समान्तर माध्य}=\frac{a+b}{2}$$

दो संख्याओं के बीच समान्तर माध्य

यदि a और b संख्याएँ हैं तथा $M_1, M_2, M_3....M_n$ संख्याएँ इनके माध्य हैं तो $a, M_1, M_2, M_3,....M_n, b$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$M_1, M_2, M_3....M_n$ a और b के बीच n समान्तर माध्य कहलाते हैं।

उदाहरण 1. संख्याओं 5 और -9 के मध्य 6 समान्तर माध्य ज्ञात करो।

हल : माना M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 और M_6 संख्याओं 5 और -9 के माध्य हैं।

$\therefore$ $5, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, -9$ स० श्रे० में हैं।

$\therefore$ श्रेणी में कुल पद=8

$$-9=5+(8-1)d$$
$$-9=5+7d$$
$$d=-2$$

$\therefore$

अतः 3, 1, −1, −3, −5, −7 6 समान्तर माध्य हैं।

प्रश्नावली 13·2

1. निम्नलिखित के समान्तर माध्य ज्ञात करो :

(i) 4 और 10 [उत्तर : 7]

(ii) a और b [उत्तर : $\frac{a+b}{2}$]

(iii) $a+b$, $a-b$ [उत्तर : a]

(iv) a^2+2an और a^2-2an [उत्तर : a^2]

2. संख्याओं -4 और 8 के बीच दो समान्तर माध्य ज्ञात करो। [उत्तर : 0, 4]

3. संख्याओं 3 और 18 के मध्य चार समान्तर माध्य ज्ञात करो। [उत्तर : 6, 9, 12, 15]

4. संख्याओं 1 और $\frac{1}{10}$ के बीच 10 समान्तर माध्य निवेशित करो तथा इन 10 माध्यों का योग ज्ञात करो।

[उत्तर : $\frac{101}{110}, \frac{92}{110}, \frac{83}{110}, ..., \frac{2}{11}, 5\frac{1}{2}$]

5. संख्याओं 4, 6, 10, 8, 10 का औसत बताओ। [उत्तर : 7·6]

Scanned with OKEN Scanner

6. निम्नलिखित समंकों का औसत बताओ।

x	f
−9	1
−3	5
−2	21
−1	47

[उत्तर : −1·53]

13·6. औसत

यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ कोई n संख्याएँ हैं तो उनका औसत

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \text{ होता है}$$

उदाहरण 1. 4, 8, 12, 10, 13 का औसत ज्ञात करो।

हल :
$$\text{औसत} = \frac{4+8+12+10+13}{5}$$
$$= \frac{47}{5} = 9{\cdot}4$$

उदाहरण 2. यदि 10 संख्याओं का औसत 50 है तो इन 10 संख्याओं का योग ज्ञात करो।

हल :
$$\because \text{औसत} = \frac{10 \text{ संख्याओं का योग}}{10}$$
$$\therefore 50 = \frac{10 \text{ संख्याओं का योग}}{10}$$
$\therefore$ 10 संख्याओं का योग = 500

13·7. गुणोत्तर श्रेणी

$a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$ प्रकार की श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है, जहाँ a प्रथम पद तथा r सार्व अनुपात है।

nवाँ पद $= ar^{n-1}$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. निम्नलिखित श्रेणी का 8वाँ पद ज्ञात करो :

2, 6, 18, 54, ...

हल : यहाँ $a=2$, $r=3$

$\therefore$ 8वाँ पद $= ar^{8-1}$

$$= 2\times(3)^{8-1}$$
$$= 2\times 3^7$$
$$= 4374$$

उदाहरण 2. वह गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात करो जिसका तृतीय पद 1 है और छठा पद $-\frac{1}{8}$ है।

हल : माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद $= a$
सार्व अनुपात $= r$

$$\therefore \quad 1 = ar^2 \text{ और } -\frac{1}{8} = ar^5$$

भाग देने पर

$$r^3 = -\frac{1}{8} \quad \therefore \quad r = -\frac{1}{2}$$

और
$$a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$\therefore \quad a = 4$$
$$\therefore \quad \text{श्रेणी } 4, -2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \ldots\ldots \text{ है।}$$

उदाहरण 3. गुणोत्तर श्रेणी $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ का कौनसा पद $\frac{1}{512}$ है।

हल : माना nवाँ पद $= \frac{1}{512}$

$$\therefore \quad T_n = ar^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$
या
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$
या
$$n-1 = 9$$
$$\therefore \quad n = 10$$

14·4. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\because \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

A=B रखने पर

$\therefore \quad \cos 2A = \cos A . \cos A - \sin A . \sin A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \ldots(1)$$

अब $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ रखने पर

$$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

और $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

14·5. सिद्ध करो कि $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$$\cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad \left\{ \text{ऊपर व नीचे } \cos^2 A \text{ से भाग देने पर} \right\}$$

14·6. tan 2A को tan A के पदों में व्यक्त करो।

हम जानते हैं कि $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

A=B रखने पर

$$\tan 2A = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

इसी प्रकार $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

अब A=B रखने पर

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$$

14·7. दिखाओ (i) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(i) $\cos 3A = 4 \cos A^3 - 3 \cos A$

हल : $\sin 3A = \sin(2A + A)$

$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A$$

$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 2 \sin A - 2 \sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$\therefore \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos(2A + A)$

$$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$

$$= (2\cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A \sin A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2 \sin^2 A \cos A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2 \cos A + 2\cos^3 A$$

$$= 4\cos^3 A - 3 \cos A$$

$\therefore \quad \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

14·8. दिखाओ कि $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

हल : $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} . \tan A}$$

$$= \frac{2 \tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A}$$

$\therefore \quad \tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

14·9. दिखाओ कि $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$

हल : $\because \cot 3A = \cot(2A + A)$

$$= \frac{\cot 2A . \cot A - 1}{\cot 2A + \cot A}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$=\frac{\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}\cot A-1}{\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}+\cot A}$$

$$=\frac{\cot^3 A-\cot A-2\cot A}{\cot^2 A-1+2\cot^2 A}$$

$$\therefore \quad \cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $\cos A=\frac{2}{3}$ तो sin 2A, cos 2A, tan 2A और cot 2A का मान ज्ञात करो।

हल : ∵ $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=2\sqrt{1-\cos^2 A}\cos A$$

$$=2\sqrt{1-\frac{4}{9}}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=2\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

∵ $\cos 2A=2\cos^2 A-1$

$$=2\cdot\frac{4}{9}-1$$

$$=\frac{8-9}{9}=-\frac{1}{9}$$

$$\tan 2A=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{4\sqrt{5}}{9}(-9)=-4\sqrt{5}$$

$$\cot 2A=\frac{1}{\tan 2A}=-\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

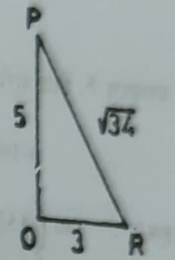
उदाहरण 2. उदाहरण 1 में sec 2A तथा cosec 2A का मान ज्ञात करो।

हल : ∵ $\sec 2A=\frac{1}{\cos 2A}=\frac{1}{-1/9}=-9$

और $\operatorname{cosec} 2A=\frac{1}{\sin 2A}=\frac{1}{4\sqrt{5}/9}=\frac{9}{4\sqrt{5}}$

उदाहरण 3. A यदि $\tan=\frac{5}{3}$ तो sin 2A, cos 2A और tan 2A का मान ज्ञात करो।

हल : यदि $\tan A=\frac{5}{3}$



तो $\sin A=\frac{5}{\sqrt{34}}$

और $\cos A=\frac{3}{\sqrt{34}}$

∴ $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=2\times\frac{5}{\sqrt{34}}\times\frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$=\frac{30}{34}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$=\frac{9}{34}-\frac{25}{34}$$

$$=-\frac{16}{34}$$

अब $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$=\frac{2\times 5/3}{1-25/9}=-\frac{10}{3}\times\frac{9}{16}$$

∴ $\tan 2A=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि

$$\tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$$

हल : $\tan A + \cot A = \dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$= 2 \operatorname{cosec} 2A$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि $\tan\left(45^\circ + \dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$$= \tan\theta + \sec\theta$$

हल : $\because \tan\left(45^\circ + \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan \theta/2}{1 - \tan 45^\circ \tan \theta/2}$

$$= \frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}}{1-\dfrac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}}$$

$$= \frac{\cos\theta/2 + \sin\theta/2}{\cos\theta/2 - \sin\theta/2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2 + 2\sin\theta/2\cos\theta/2}{\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2\cos\theta/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta$$

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$

हल : दायाँ पक्ष $= \left(\dfrac{1}{\cos 2A} + 1\right)\sqrt{\tan^2 A}$

$$= \frac{1+\cos 2A}{\cos 2A} \cdot \tan A$$

$$= \frac{1+2\cos^2 A - 1}{\cos 2A} \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{2\cos^2 A}{\cos 2A} \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A$$

उदाहरण 7. सिद्ध करो कि $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$

हल : $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos 8A} - 1}{\dfrac{1}{\cos 4A} - 1}$

$$= \frac{1-\cos 8A}{1-\cos 4A} \cdot \frac{\cos 4A}{\cos 8A}$$

$$= \frac{\{1-(1-2\sin^2 4A)\}\cos 4A}{\{1-(1-2\sin^2 2A)\}\cos 8A}$$

$$= \frac{2\sin^2 4A \cdot \cos 4A}{2\sin^2 2A \cdot \cos 8A}$$

$$= \frac{2\sin 4A \cos 4A \sin 4A}{2\sin^2 2A \cos 8A}$$

$$= \frac{\sin 8A \; 2\sin 2A \cos 2A}{2\sin^2 2A \cos 8A}$$

$$= \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$=\cos^2\frac{A}{2}-\left(1-\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

अब $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}$

$$=\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)-\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}$$

(ii) अब $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$$

(iii) $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=\dfrac{1-1+2\sin^2\frac{A}{2}}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1}$

$$=\tan^2\frac{A}{2}.$$

$\therefore$ $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

14·13. sin 18° और cos 18° का मान ज्ञात करो।

हल : माना $\theta=18^\circ$

तब $2\theta=36^\circ,\ 3\theta=54^\circ$

$\therefore$ $2\theta=90^\circ-3\theta$

$\therefore$ $\sin 2\theta=\sin(90-3\theta)$

$=\cos 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

या $2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$

या $2\sin\theta=1-4\sin^2\theta$

या $4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

$\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{8}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ $\sin 18^\circ=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ सम्भव है।

$\therefore$ $\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

cos 18° का मान

$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\dfrac{5-2\sqrt{5}+1}{16}}$

$=\sqrt{\dfrac{16-5+2\sqrt{5}-1}{16}}$

$=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

Scanned with OKEN Scanner

19·13. हरात्मक माध्य के गुण (Merits of H. M.)

(1) इसमें छोटे मूल्यों को अधिक महत्व दिया जाता है।

(2) इसकी गणना में सम्भव श्रेणी के सभी पदों का प्रयोग किया जाता है।

(3) ऐसी श्रेणियों में जहाँ विषमता अधिक हो वहाँ के लिए यह माध्य अधिक उपयुक्त होता है।

(4) इस माध्य में गणितीय विवेचना की जा सकती है।

(5) समय, दर, गति, चाल-वेग (Velocity) आदि का अध्ययन करते समय यह माध्य अधिक उपयुक्त होता है।

19·14. हरात्मक माध्य के अवगुण (Demerits of H. M.)

(1) इस माध्य को निकालने के लिए श्रेणी के सभी पदों की आवश्यकता पड़ती है।

(2) व्युत्क्रम निकालने में असुविधा होती है।

(3) कभी-कभी यह श्रेणी के मूल्यों का सच्चा प्रतिनिधि नहीं होता।

19·15. हरात्मक माध्य निकालने की रीतियाँ—

(1) **व्यक्तिगत श्रेणी** (Individual Series) **में हरात्मक माध्य निकालना—** प्रत्येक मूल्य का व्युत्क्रम प्राप्त करके उनके योग में पदों की संख्या का भाग दे देते है। भजनफल का व्युत्क्रम निकालते हैं।

$$H = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots\ldots}{n} \text{ का व्युत्क्रम}$$

या $$H = \frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}$$

(2) **विच्छिन्न श्रेणी** (Discrete Series) **में हरात्मक माध्य निकालना—** प्रत्येक मूल्य का व्युत्क्रम प्राप्त करके सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा करते हैं। गुणनफलों के योग में कुल आवृत्तियों का भाग देते हैं। भजनफल का व्युत्क्रम निकाल लेते हैं।

$$H = \frac{\Sigma\frac{1}{x}\times f}{n \text{ या } \Sigma f} \text{ का व्युत्क्रम}$$

(3) **अविच्छिन्न श्रेणी** (Continuous Series) **में हरात्मक माध्य निकालना**—वर्गों के मध्य बिन्दुओं को निकालकर श्रेणी को अविच्छिन्न से विच्छिन्न में बदल देते हैं। शेष क्रिया वही होती है जो विच्छिन्न श्रेणी में होती है।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. 10 परिवारों की मासिक आय निम्नलिखित है। हरात्मक माध्य ज्ञात करो—

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	योग
85	70	15	75	500	20	45	250	40	37	1136

हल : $$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{85}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{1}{500}+\frac{1}{20}+\frac{1}{45}+\frac{1}{250}+\frac{1}{40}+\frac{1}{37}}{10}$$

$$= \cdot 0217251$$

$$\therefore \quad H = 42\cdot 09 \text{ रु॰}$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित का हरात्मक माध्य ज्ञात करो :

6, 10, 15 और 20

हल : $$H = \frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}}$$

$$= \frac{4}{0\cdot 1667+0\cdot 10+0\cdot 0667+0\cdot 05}$$

$$= \frac{4}{0\cdot 3834} = 10\cdot 43$$

उदाहरण 3. निम्नलिखित का हरात्मक माध्य ज्ञात करो।

आयु वर्षों में :	50	51	52	53	54	55
व्यक्तियों की संख्या :	2	4	10	6	2	2

हल :

आयु (वर्षों में) (x)	व्यक्तियों की संख्या (f)	$\left(\frac{1}{x}\right)$	$f.\frac{1}{x}$
50	2	·02000	·04000
51	4	·01961	·07844
52	10	·01923	·19230
53	6	·01887	·11322
54	2	·01852	·03704
55	2	·01818	·03636
	$\Sigma f = 26$		$\Sigma\left(f.\frac{1}{x}\right) = 0\cdot 49736$

$$H = \frac{\Sigma \text{ Reciprocals} \times f}{n \text{ या } \Sigma f} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{\cdot 94736}{26} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$= 0{\cdot}01913$ का व्युत्क्रम

$\therefore \quad H = 52{\cdot}28$

उदाहरण 4. हरात्मक माध्य की गणना करो।

अंक	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
छात्र संख्या	4	5	11	6	4

हल :

अंक	मध्यमान (x)	आवृत्ति (f)	$1/x$	$f.\ 1/x$
0—10	5	4	·20000	·80000
10—20	15	5	·06667	·33335
20—30	25	11	·04000	·44000
30—40	35	6	·02857	·17142
40—50	45	4	·02222	·08888
		$\Sigma f = 30$		$\Sigma(f.1/x) = 1{\cdot}83365$

$$H = \frac{\Sigma \frac{1}{x} f}{\Sigma f} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{1{\cdot}83365}{30} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$= \cdot 061122$ का व्युत्क्रम

$\therefore \quad H = 16{\cdot}36$

प्रश्नावली 19·3

1. निम्नलिखित विवरण का हरात्मक माध्य ज्ञात करो—

वर्ष	आवृत्ति
40—50	19
50—60	25
60—70	36
70—80	72
80—90	51
90—100	43

[उत्तर : 71·4]

2. एक व्यक्ति पहला किमी 10 किमी प्रति घण्टे की चाल से, दूसरा किमी 8 किमी प्रति घण्टे की चाल से तथा तीसरा किमी 6 किमी प्रति घण्टे की चाल से चलता हो तो उसकी औसत चाल बताओ।

[उत्तर : 7·66 किमी प्रति घण्टा]

19·16. माध्यिका (Median)

फॉनर के शब्दों में—"माध्यिका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँटता है कि एक भाग में सारे मूल्य माध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में सारे मूल्य उससे कम होते हैं। उदाहरण के लिए यदि पाँच विद्यार्थियों ने 50 में से सांख्यिकी में क्रमशः 17, 22, 30, 35, 42 अंक प्राप्त किये तो माध्यिका मूल्य 30 होगा क्योंकि वह तीसरे स्थान पर है जो बिल्कुल मध्य में स्थित है।

19·17. माध्यिका के गुण (Merits)

(1) माध्यिका को ज्ञात करना एवं समझना सरल है।

(2) कई प्रकार की श्रेणियों में केवल निरीक्षण से ही माध्यिका का अनुमान लगाया जा सकता है।

(3) कभी-कभी अधूरे समंक होने पर भी माध्यिका प्राप्त की जा सकती है।

(4) माध्यिका को बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है।

(5) माध्यिका पर साधारण एवं अति-सीमान्त पदों का प्रभाव नहीं पड़ता।

(6) माध्यिका निश्चित एवं स्पष्ट होती है।

(7) गुणात्मक विशेषताओं के अध्ययन के लिए ये उपयुक्त समझी जाती है।

19·18. माध्यिका के अवगुण (Demerits)

(1) माध्यिका प्राप्त करने के लिए पदों का आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यास करना पड़ता है।

(2) माध्यिका में गणितीय शुद्धता की कमी होती है।

(3) इसमें प्रतिनिधित्व का अभाव रहता है।

(4) माध्यिका निकालने में श्रेणी के सभी पदों को समान महत्व दिया जाता है।

(5) इसका प्रयोग बीजगणितीय क्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।

(6) कुछ दशाओं में इसका निर्धारण कठिन होता है।

19·19. माध्यिका की उपयोगिता

माध्यिका का समझना सरल है इसलिए व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए यह बहुत उपयोगी है। इसके द्वारा उन समस्याओं का अध्ययन भी सम्भव हो जाता है जो परिमाण में नहीं व्यक्त की जा सकतीं, जैसे स्वास्थ्य, बुद्धिमान आदि। व्यापार के लिए यह उपयुक्त नहीं है क्योंकि व्यापारिक आँकड़े बहुत अस्थिर होते हैं। माध्यिका की

Scanned with OKEN Scanner

उपयोगिता वहाँ अधिक है जहाँ अति सीमान्त पदों को महत्व नहीं देना होता है। विषम वितरण (Skewed distribution) के लिए यह अधिक उपयुक्त माना जाता है।

19·20. माध्यिका का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन (Graphic Presentation of Median)

माध्यिका के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की दो विधियाँ हैं—

(1) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency curve) द्वारा।

(2) गाल्टन (Galton) रीति द्वारा।

19·21. माध्यिका निकालना

(1) **व्यक्तिगत श्रेणी** (Individual Series)—इसमें माध्य ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम पदों को आरोही या अवरोही क्रम में रखते हैं। तत्पश्चात्

$$M=\frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. निम्नलिखित सारणी 31 बी० कॉम० के छात्रों के सांख्यिकी में प्राप्तांकों को दर्शाती है। अधिकतम अंक 100 है। माध्यिका ज्ञात करो।

क्रम :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
प्राप्तांक :	33	32	55	47	21	50	27	12	68	49	40	17	44
क्रम :	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
प्राप्तांक :	48	62	24	33	42	38	45	26	33	44	48	52	30
क्रम :	27	28	29	30	31								
प्राप्तांक :	58	37	38	35	70								

हल : प्राप्तांकों को अवरोही क्रम में रखने पर—

क्रम :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
प्राप्तांक :	12	17	21	24	26	27	30	32	33	33	33	35	37	38	38	40
क्रम :	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
प्राप्तांक :	42	44	44	45	47	48	48	49	50	52	55	58	62	68	70	

$$\text{माध्यिका } M=\frac{31+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$=16\text{वाँ पद}$$

$$=40 \text{ अंक}$$

उदाहरण 2. 20 छात्रों के अंग्रेजी में प्राप्तांक निम्न अनुसार हैं। माध्यिका ज्ञात करो।

क्रम :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
प्राप्तांक :	25	28	29	30	33	33	33	35	42	45	46	47	48
क्रम :	14	15	16	17	18	19	20						
प्राप्तांक :	51	52	53	54	60	65	72.						

हल : यहाँ पद पहले से ही अवरोही क्रम में व्यवस्थित हैं।

$$\text{माध्यिका}=\frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$=\frac{20+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$=10\cdot5 \text{ वाँ पद}$$

$$=\frac{10\text{वाँ पद}+11\text{वाँ पद}}{2}$$

$$=\frac{45+46}{2}=45\cdot5 \text{ अंक}$$

(2) **विच्छिन्न श्रेणी** (Discrete Series)

इसमें माध्यिका ज्ञात करने की रीति वही है जो व्यक्तिगत श्रेणी में थी। संचयी आवृत्ति ज्ञात करके मध्य की क्रम संख्या ज्ञात कर लेते हैं।

$$M=\frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

उदाहरण 3. निम्नलिखित श्रेणी की माध्यिका ज्ञात करो—

आकार :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
आवृत्ति :	2	3	8	10	12	16	10	8	6	5	6	4	3	1

हल : यहाँ पद आरोही क्रम में पहले से ही व्यवस्थित है।

∴ संचयी आवृत्ति :

2 5 13 23 35 51 61 69 75 80 86 90 93 94

$$M=\frac{94+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$=47\cdot5 \text{ वाँ पद}$$

$$=7.$$

(3) **अविच्छिन्न श्रेणी** (Continuous Series)—

(A) अपवर्जी (Exclusive)—संचयी आवृत्ति निकालते हैं। फिर निम्न-सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$M=\frac{n}{2} \text{ वाँ पद}$$

Scanned with OKEN Scanner

वह मूल्य जिस वर्ग की संचयी आवृत्ति में हो वही माध्यिका वर्ग होगा फिर निम्न सूत्र प्रयोग करते है—

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c),$$

या $$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

m = माध्यिका संख्या $\left(\frac{n}{2}\right)$
f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति
i = वर्गान्तर के विस्तार
l_1 = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा
l_2 = ,, ,, उच्च ,,
c = माध्यिका वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

(B) **समावेशी** (Inclusive)—समावेशी श्रेणी को साधारणतः अपवर्जी श्रेणी में बदल लेते हैं फिर ऊपर की विधि अपनाते हैं।

उदाहरण 4.

मजदूरी (रु० में) :	20-21	21-22	22-23	23-24	24-25
महिलाओं की संख्या :	8	10	11	16	20
मजदूरी (रु० में) :	25-26	26-27	27-28	28-29	
महिलाओं की संख्या :	25	16	9	6	

माध्यिका ज्ञात करो।

हल :

मजदूरी (रु० में)	स्त्रियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
20—21	8	8
21—22	10	18
22—23	11	29
23—24	16	45
24—25	20	65
25—26	25	90
26—27	16	106
27—28	9	115
28—29	6	121

$M = \frac{n}{2}$ वाँ पद

$= \frac{121}{2}$ वाँ पद $= 60{\cdot}5$ वाँ पद

जो कि माध्यिका वर्ग 24-25 में है।

अतः सूत्र $M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$ से

जहाँ $l_1 = 24$, $l_2 = 25$, $i = 1$, $m = 60{\cdot}5$, $c = 45$, $f = 20$

माध्यिका $M = 24 + \frac{25 - 24}{20}(60{\cdot}5 - 45)$

$= 24 + \frac{1}{20}(15{\cdot}5)$

$=$ Rs. $24{\cdot}775$

उदाहरण 5.

आय (रु०) :	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74
संख्या :	2	7	10	12	8	5	3

माध्यिका ज्ञात करो।

हल : सर्वप्रथम इस समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित करते हैं।

आय (रु० में)	व्यक्तियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
39·5—44·5	2	2
44·5—49·5	7	9
49·5—54·5	10	19
54·5—59·5	12	31
59·5—64·5	8	39
64·5—69·5	5	44
69·5—74·5	3	47

$M = \frac{n}{2}$ वाँ पद $= \frac{47}{2}$ वाँ पद

$= 23{\cdot}5$ वाँ पद

जो माध्यिका वर्ग $54{\cdot}5 - 59{\cdot}5$ में है।

$\therefore$ $M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$ से

जहाँ $l_1 = 54{\cdot}5$, $l_2 = 59{\cdot}5$, $m = 23{\cdot}5$, $c = 19$, $f = 12$

$\therefore$ $M = 54{\cdot}5 + \frac{59{\cdot}5 - 45{\cdot}5}{12}(23{\cdot}5 - 19)$

$= 54{\cdot}5 + \frac{5}{12}(4{\cdot}5)$

$= 54{\cdot}5 + 1{\cdot}875 = 56{\cdot}375$ रु०

उदाहरण 6. अर्थशास्त्र की परीक्षा में प्राप्तांकों की आवृत्ति वितरण तालिका की माध्यिका ज्ञात करो।

हम प्रायः सुनते हैं कि "एक भारतीय की औसत लम्बाई 5' 5" है"; "अंग्रेज गोरा होता है"; "भारत का औसत आदमी ईमानदार है" आदि। इन कथनों में जिस माध्य का संकेत किया गया है, वह बहुलक है। यदि हम यह कहें कि किसी गाँव में कुल 300 व्यक्तियों में से उनकी आयु का बहुलक 18 वर्ष है तो इसका तात्पर्य यह है कि जितने लोग 18 वर्ष के हैं उससे अन्य सभी आयु के लोगों की संख्या कम ही है अर्थात् सबसे अधिक लोग 18 वर्ष की आयु के हैं।

यदि समंकमाला को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित किया जाय तो जो वक्र बनेगा उसका शीर्ष वाला आकार बहुलक को प्रदर्शित करेगा।

कभी-कभी किसी सांख्यिकीय वितरण में 2 या अधिक बहुलक पाये जा सकते हैं। ये द्वि-बहुलक श्रेणी (Bi-modal Series), त्रिबहुलक श्रेणी (Tri-modal Series) या बहुलक श्रेणी (Multi-modal Series) कहलाती हैं।

19·23. बहुलक के गुण (Merits)

(1) इसका समझना और प्रयोग करना जन-साधारण के लिए सरल है क्योंकि निरीक्षण मात्र से ही इसका पता लगाया जा सकता है।

(2) इस पर अति सीमान्त पदों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

(3) बिन्दुरेखीय रीति से बहुलक सरलतापूर्वक प्रदर्शित किया जा सकता है।

(4) सर्वाधिक सम्भावित मूल्य ज्ञात करने के लिए यह सबसे उपयुक्त है।

(5) यह आवृत्तियों के अधिकतम घनत्व वाला पद होता है इसलिए यह श्रेष्ठ प्रतिनिधि भी रहता है।

(6) समग्र (Universe) में से दैव निदर्शन द्वारा चाहे जितनी बार भी न्यादर्श (Sample) लिया जाय बहुलक लगभग एक ही आयेगा।

19·24. बहुलक के अवगुण (Demerits)

(1) इसमें अति सीमान्त पदों को महत्व नहीं दिया जाता है अतः जहाँ सीमान्त पदों को भार देने की आवश्यकता होती है वहाँ यह उपयुक्त नहीं है।

(2) कभी-कभी इसे शुद्धता के साथ निकालना कठिन होता है।

(3) यह बीजगणितीय विवेचन के लिए उपयुक्त नहीं है। विभिन्न बहुलक का पता होने पर भी हम एक संयुक्त बहुलक नहीं प्राप्त कर सकते।

(4) यह प्रायः अनिश्चित और अस्पष्ट होता है। कभी-कभी दो या अधिक पद बहुलक हो जाते हैं और समूहीकरण करना पड़ता है।

(5) इसमें पदों को क्रमानुसार रखना आवश्यक होता है।

(6) यह बहुत कुछ वर्गीकरण पर निर्भर करता है। यदि वर्गों विस्तार में परिवर्तन किया जाए तो बहुलक बदल जाता है।

(7) यह श्रेणी का भ्रमात्मक प्रतिनिधि होता है।

19·25. बहुलक की उपयोगिता

बहुलक शीघ्रता व सरलता से समझ में आ जाता है इसलिए दैनिक जीवन व्यापारिक क्षेत्र में इसका प्रयोग होता है। हम प्रायः सुनते हैं—"जूते का औसत आकार 10" है", "औसत पृष्ठ में 300 शब्द हैं", "औसत पंजाबी स्वस्थ होता है।"

इन सब दशाओं में औसत का तात्पर्य बहुलक से ही होता है। व्यवसाय में इसका उपयोग दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। व्यापार सम्बन्धी पूर्वानुमानों के लिए यह विश्वसनीय पथ-प्रदर्शन का काम करता है। इसकी सहायता से एक मशीन द्वारा बहुलक उत्पादन (Modal output) किसी वस्तु के निर्माण के लिए बहुलक समय (Modal time) आदि निर्धारित करते हैं। विभिन्न वस्तुओं की लोकप्रियता का अध्ययन बहुलक द्वारा ही किया जाता है।

19·26. बहुलक निकालने की रीतियाँ

(1) **व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series) में**

(A) **निरीक्षण द्वारा**—यहाँ पर केवल निरीक्षण करना होता है और यह निश्चित करना होता है कि कौन-सा मूल्य सबसे अधिक बार आया है। जो मूल्य सबसे अधिक बार मिले वही बहुलक होगा।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. निम्नलिखित 20 छात्रों की आयु का बहुलक ज्ञात करो।
15, 17, 18, 20, 22, 24, 21, 17, 16, 15, 21, 22, 23, 22, 17, 22, 18, 22, 19, तथा 20.

हल : उक्त सारणी में 22 वर्ष के सबसे अधिक छात्र 5 हैं अतः उक्त आँकड़ों का बहुलक यही संख्या है।

(B) **माध्य तथा माध्यिका की सहायता से बहुलक निकालना—**

$$Z = 3M - 2\bar{X}$$

अथवा बहुलक = 3 माध्यिका — 2 माध्य

(2) **विच्छिन्न श्रेणी में (Discrete series)—**

(A) **निरीक्षण द्वारा—**

उदाहरण 2. निम्नलिखित का बहुलक ज्ञात करो :

वजन :	150	160	170	180	190	200	210
संख्या : (व्यक्तियों की)	2	4	8	10	5	6	3

हल : उक्त श्रेणी का बहुलक 180 सेमी है।

(B) समूहीकरण द्वारा—

उदाहरण 3. निम्नलिखित का बहुलक ज्ञात करो।

आकार :	8	9	10	11	12	13	14	15
आवृत्ति :	5	6	8	7	9	8	9	6

हल : बहुलक प्राप्त करने के लिए आवृत्तियों के समूहीकरण की आवश्यकता होगी, क्योंकि यहाँ सबसे अधिक आवृत्ति 9 है जो 2 बार आती है।

Location of Mode by Grouping

आकार (m)	f 1	2	3	4	5	6	अधिकतम आवृत्ति वाले समूह	
8	5							
9	6	11		19				
10	8		14		21		I	1
11	7	15				24	II	2
12	9		16	24			IIII	5
13	8	17			26		IIII	4
14	9		17			23	III	3
15	6	15						

अतः स्पष्ट है कि 12 वह मूल्य है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक है। इसलिए बहुलक 12 हुआ।

उदाहरण 4. निम्नलिखित का बहुलक ज्ञात करो :

आकार :	12	13	14	15	16	17	18
आवृत्ति :	2	10	3	8	9	8	7

हल : यदि समूहीकरण किया जाय तो यहाँ 13 बहुलक न होकर 16 बहुलक होगा क्योंकि इसी के पास आवृत्तियों का अधिक केन्द्रीकरण है। इसे सम्भावित बहुलक मूल्य की तथा आगे-पीछे की आवृत्तियों के जोड़ द्वारा भी देख सकते हैं, जैसे—13 मूल्य की तथा आगे व पीछे वाली आवृत्तियों का योग $=15$

16 " " " $=25$

अतः बहुलक का मूल्य 16 ही है। लेकिन यह विधि सर्वथा ठीक नहीं है।

(3) अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series) में—इस श्रेणी में बहुलक निकालने के लिए सर्वप्रथम निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात करते हैं फिर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं—

(A) $Z=L_1+\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times(L_2-L_1)$ [या in place of $L_2-L_1=i$]

यदि बहुलक, बहुलक वर्ग की ऊपरी सीमा L_2 से ज्ञात करना हो तो

$$Z=L_2-\frac{f_1-f_2}{2f_1-f_0-f_2}\times(L_2-L_1)$$

सूत्र—

(B) $Z=L_1+\dfrac{f_2}{f_0+f_2}\times i$

यदि बहुलक, बहुलक वर्ग की ऊपरी सीमा की सहायता से ज्ञात करना हो—

$$Z=L_2-\frac{f_0}{f_0+f_2}\times i$$

जहाँ L_2 = बहुलक वर्ग की उच्च सीमा

L_1 = " " निम्न "

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = बहुलक वर्ग के निकटतम छोटे मूल्य वाले वर्ग की आवृत्ति

f_2 = " " " बड़े " "

i = बहुलक वर्ग का विस्तार (L_2-L_1)

उदाहरण 5. निम्नलिखित वितरण में एक कारखाने के श्रमिकों की मजदूरी दी गई है। बहुलक ज्ञात करो ?

मजदूरी :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
श्रमिक :	6	10	10	16	12	8	7
			f_0	f_1	f_2		

हल : निरीक्षण द्वारा बहुलक वर्ग 30—40 है।

$$\therefore \quad Z=L_1+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}(L_2-L_1)$$

$$=30+\frac{16-10}{32-10-12}(40-30)$$

$$=30+\frac{6}{10}\times 10$$

$$=\text{Rs. } 36.$$

उदाहरण 6. निम्नलिखित का बहुलक ज्ञात करो—

आकार :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
आवृत्ति :	1	2	10	4	10	9	2

Scanned with OKEN Scanner

22 आव्यूह

[MATRIX]

22·1. आव्यूह की परिभाषा

आव्यूह अदिश राशियों से बनी एक आयताकार रचना है। यह आयताकार रचना [ ] कोष्ठक के अन्दर बन्द होती है।

m n अदिश राशियों का वह समूह जो क्रमबद्ध m पंक्तियों तथा n स्तम्भों से बनी एक आयताकार रचना के रूप में व्यवस्थित रहता है, $m \times n$ आव्यूह कहलाता है। इसे निम्नलिखित रूप से लिखते हैं :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

उदाहरण 1. आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक 2×3 का आव्यूह है।

यहाँ 2 पंक्ति तथा 3 स्तम्भ हैं।

आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ एक 3×3 का आव्यूह है।

22·2. आव्यूह का उपयोग

आव्यूह के निम्नलिखित उपयोग हैं :

1. आव्यूह से युगपत् समीकरण हल करने में सहायता मिलती है।
2. समूह समाजवादी इसका उपयोग समूह में नेतृत्व तथा वर्चस्व ज्ञात करने के लिए करते हैं।
3. आनुवंशिकवादी इसका उपयोग एक पीढ़ी की आवृत्तियों का दूसरी पीढ़ी की आवृत्तियों से मिलान में करते हैं।
4. विद्युत यान्त्रिकी में भी इसका बहुत उपयोग है।
5. सापेक्षता, समाकल ज्यामिति आदि में भी यह उपयोगी है।

22·3. आव्यूह की समानता

दो आव्यूह समान कहलाते हैं यदि उनके क्रम समान हों तथा उनके संगत अवयव समान हों। उदाहरण के लिए—

$$\Delta=\begin{bmatrix} x & y \\ z & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ समान हैं।

22·4. आव्यूह का अदिश गुणन

यदि $A=\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ तथा K कोई अदिश राशि है तो हम KA को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं—

$$KA=K\left[a_{ij}\right]_{m \times n}=\left[Ka_{ij}\right]_{m \times n}$$

$$=\begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \cdots Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & \cdots Ka_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Ka_{m1} & Ka_{m2} & \cdots Ka_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

अर्थात् A के प्रत्येक अवयव को K से गुणा कर दिया जाता है।

22·5. आव्यूहों का योग

दो आव्यूह जोड़ने के योग्य कहलाते हैं, यदि उनके क्रम समान हों।

यदि $A=\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$

तथा $B=\left[b_{ij}\right]_{m \times n}$

तो $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m \times n}$

$$=\left[C_{ij}\right]_{m \times n} \text{ जहाँ } C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

अतः दो समान क्रमों के आव्यूहों को जोड़ने के लिए संगत अवयवों को जोड़ देते हैं।

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

तब $A+B=\begin{bmatrix} 2+4 & 1+0 & 3+5 \\ 3+3 & 4+6 & 5+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

उदाहरण 2. यदि $P=[3 \;\; 1 \;\; 2]$, $Q=[14, 6 \;\; 5]$ तब

$P+Q=[17 \;\; 7 \;\; 7]$

उदाहरण 3. $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

22·6. आव्यूहों का व्यवकलन

यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ एक ही क्रम के आव्यूह हों, तो

$$A-B=A+(-1)B=[a_{ij}]_{m\times n}+(-1)[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[a_{ij}]_{m\times n}+[-b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

यदि $A=B$ तो $A-B=A-A=A+(-A)$

$$=[a_{ij}-a_{ij}]_{m\times n}=0_{m\times n}$$

22·7. आव्यूह योग के गुणधर्म

यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ तथा $c=[c_{ij}]_{m\times n}$

तीन समान क्रम वाले आव्यूह हैं तो योग निम्न क्रिया नियमों का पालन करती है

(i) क्रम विनिमेय नियम

$$A+B=B+A$$

प्रमाण : योग नियम से

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \quad ....(1)$$

तथा
$$B+A=[(b_{ij}+a_{ij})]_{m\times n} \quad ....(2)$$

किन्तु चूंकि a_{ij} तथा b_{ij} अदिश हैं अतः वे क्रम विनिमेय नियम का पालन करेंगे।

$\therefore \quad a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$

$\therefore \quad A+B=B+A$

(2) साहचर्य नियम

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

प्रमाण : $A+(B+C)=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n}$

योग नियम से
$$=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{m\times n} \text{ योग नियम से} \quad ....(1)$$

पुनः $(A+B)+C=[(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n} \quad ....(2)$

$$=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{m\times n}$$

$\because \quad a_{ij}, b_{ij}$ तथा c_{ij} अदिश हैं

$\therefore \quad a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$

अतः (1) व (2) से

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

(2) बंटन नियम

$$K(A+B)=KA+KB$$

प्रमाण : $K(A+B)=K[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

$$=[Ka_{ij}+Kb_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[Ka_{ij}]_{m\times n}+[Kb_{ij}]_{m\times n}$$

$$=K[a_{ij}]_{m\times n}+K[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$=KA+KB$$

(4) योज्य प्रतिलोम का अस्तित्व

प्रत्येक आव्यूह A के लिए एक अन्य आव्यूह $-A$ ऐसा होता है कि

$$A+(-A)=0$$

अतः $-A$ को योज्य प्रतिलोम कहा जाता है।

(5) योज्य इकाई आव्यूह का अस्तित्व

रिक्त आव्यूह 0 आव्यूह A का योज्य इकाई आव्यूह है।

इस प्रकार $A+0=0+A=A$

(6) योग आव्यूह में निरसन लागू होता है।

A, B, C तीन ऐसे आव्यूह हैं जो

$A+B=A+C$ को सन्तुष्ट करते हैं।

तब $B=C$

प्रमाण : $A+B=A+C \quad ...(1)$

(1) में दोनों ओर $-A$ जोड़ने पर

$$-A+(A+B)=-A+(A+C)$$

साहचर्य नियम का उपयोग करने पर

$$(-A+A)+B=(-A+A)+C$$

$\therefore \quad 0+B=0+C$

या $\quad B=C$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix}$

तथा $C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ हैं तो निम्नलिखित का मान बताओ :

(i) $2A+C$, (ii) $A-B$, (iii) $3A-B+C$

हल :

(i) $2A=2\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 4 & 2\times 2\\ 2\times 2 & 2\times 4 & 2\times 3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\ 4 & 8 & 6\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 2A+C=\begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\ 4 & 8 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+4 & 8+0 & 4+5\\ 4+7 & 8+1 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8 & 9\\ 11 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

(ii) $$A-B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ -7 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-1 & 4-4 & 2-0\\ 2-7 & 4-2 & 3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ -5 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

(ii) $$3A-B+C=3\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times4 & 3\times2\\ 3\times2 & 3\times4 & 3\times3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ -7 & -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 12 & 6\\ 6 & 12 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ -7 & -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-1+4 & 12-4+0 & 6+0+5\\ 6-7+7 & 12-2+1 & 9-3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8 & 11\\ 6 & 11 & 8\end{bmatrix}$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित सामान्य आव्यूहों को व्यक्तिगत आव्यूहों में बदलो :

(a) A जो 3×2 का आव्यूह है।
(b) B जो 3×3 का आव्यूह है।
(c) C जो 4×2 का आव्यूह है।
(d) D जो 3×1 का आव्यूह है।
(e) E जो 1×3 का आव्यूह है।

हल :

(a) $$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

(b) $$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(c) $$C=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

(d) $$D=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

(e) $$E=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

उदाहरण 3. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

तो $D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ का मान बताओ जबकि $A+B-D=0$.

हल : $$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-3 & 2-2\\ 3+1 & 4-5\\ 5+4 & 6+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix}$$

दिया है $$A+B-D=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2-p & 0-q\\ 4-r & -1-s\\ -t+9 & -u+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

दोनों अवयवों की तुलना करने पर

$$-2-p=0 \qquad 0-q=0$$
$$4-r=0 \qquad -1-s=0$$
$$-t+9=0 \qquad -u+9=0$$

इनसे हम पाते हैं $p=-2$, $q=0$
$r=4$, $s=-1$
$t=9$, $u=9$

$$\therefore\ D=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix}$$

प्रश्नावली 22.1

1. निम्नलिखित आव्यूहों का क्रम लिखो—

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

अब $BA=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 2 & 5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2.1+3(-4) & 2(-2)+3.2 & 2.3+3.5\\4.1+5(-4) & 4(-2)+5.2 & 4.3+5.5\\2.1+1(-4) & 2(-2)+1.2 & 2.3+1.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10 & 2 & 21\\-16 & 2 & 37\\-2 & -2 & 11\end{bmatrix}$$

$\therefore\quad AB\neq BA$

उदाहरण 7. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 4 & 1\\-2 & 1 & 0\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

तो AB का मान ज्ञात करो।

हल : $AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 4 & 1\\-2 & 1 & 0\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2.2+1.0+2(-2)+1.1 & 2(-1)+(4)+2(1)+1(-3) & 2.0+1.1+2.0+1.2\\1.2+1.0+1(-2)+1.2 & 1(-1)+1.4+1.1+(-3) & 1.0+1.1+1.0+1.2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

उदाहरण 8. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5 & 1\\7 & 4\end{bmatrix}$

तो दिखाओ कि $A(B+C)=AB+AC$.

हल : $B+C=\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 1\\7 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7 & 2\\11 & 6\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 2\\11 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.7+2.11 & 1.2+2.6\\3.7+4.11 & 3.2+4.6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}29 & 14\\65 & 30\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 5\\22 & 11\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19 & 9\\43 & 19\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB+AC=\begin{bmatrix}10 & 5\\22 & 11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13 & 9\\43 & 19\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}29 & 14\\65 & 30\end{bmatrix}$$

$\therefore A(B+C)=AB+AC$

उदाहरण 9. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{bmatrix}$ तो दिखाओ कि

$A^k=\begin{bmatrix}1+2k & -4k\\k & 1-2k\end{bmatrix}$ जहाँ k कोई धनात्मक पूर्णांक है।

हल : निगमन प्रणाली से हम इसे सिद्ध करेंगे।

$k=1$ के लिए

$$A^1=\begin{bmatrix}1+2.1 & -4.1\\1 & 1-2.1\end{bmatrix}$$

$k=2$ के लिए

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -8\\2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2\,2 & -4.2\\2 & 1-2.2\end{bmatrix}$$

अब हम इसे $k=r$ के लिए मान लेंगे अर्थात्

$$A^r=\begin{bmatrix}1+2r & -4r\\r & 1-2r\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{r+1}=A.A^r$$

$$=\begin{bmatrix}1+2r & -4r\\r & 1-2r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1+2r).3-4r.1 & (1+2r)(-4)+4r\\r.3+(1-2r) & -4r+(1-2r)(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+2r & -4-4r\\1+r & -1-2r\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2(1+r) & -4(1+r)\\1+r & 1-2(1+r)\end{bmatrix}$$

12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ तो BA ज्ञात करो।

13. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -7 & 1 & -8\\ 2 & 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 0\\ 1 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

तो AB ज्ञात करो। क्या BA परिभाषित है?

14. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ दिखाओ कि $A^2-4A-5I=0$.

15. दिखाओ कि

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=[ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy]$$

16. यदि $E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

EF और FE की गणना करो और दिखाओ कि $E^2F+FE^2=E$.

17. यदि $A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ दिखाओ कि

(i) $A_\alpha A_\beta=A_\beta A_\alpha$

(ii) $A_\alpha A_\beta=A_{\alpha+\beta}$

(iii) $A_\alpha A_{-\alpha}=I$

(iv) $A^n_\alpha=A_{n\alpha}$.

21·10. आव्यूह का परिवर्त

यदि किसी आव्यूह A की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित कर दिया जाय तो इस प्रकार प्राप्त आव्यूह को दिये हुए आव्यूह A का परिवर्त कहते हैं तथा इसे A' अथवा A^T से निरूपित करते हैं।

उदाहरण के लिए यदि $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$

तो $A'=\begin{bmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$

विशेष 1. यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

तो $A'=[a'_{ji}]_{n\times m}$ जहाँ $a'_{ji}=a_{ij}$.

विशेष 2. यदि A की कोटि $m\times n$ है तो A' की कोटि $n\times m$ है।

विशेष 3. पंक्ति आव्यूह का परिवर्त स्तम्भ आव्यूह होता है।

विशेष 4. स्तम्भ आव्यूह का परिवर्त पंक्ति आव्यूह होता है।

विशेष 5. यदि हम A' का परिवर्त लें तो हमें A प्राप्त होगा

अर्थात् $(A')'=A$

21·11 कुछ प्रमेय

(1) किसी आव्यूह के परिवर्त का परिवर्त वह आव्यूह स्वयं होता है।

प्रमाण : माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

हमें सिद्ध करना है कि $(A')'=A$

A का क्रम $=m\times n$

$\therefore$ A' का क्रम $=n\times m$

$\therefore$ $(A')'$ का क्रम $=m\times n=$ A का क्रम

$\therefore$ $(A')'$ का (i, j)th अवयव

पुनः $(A')'$ का (i, j)th अवयव $=A'$ का $(j, i)^{th}$ अवयव $=$ A का $(i, j)^{th}$ अवयव

अतः $(A')'=A$.

(2) यदि आव्यूह A तथा B के क्रम समान हैं तो $(A+B)'=A'+B'$

प्रमाण : माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

तब $A+B$ का क्रम $=m\times n$

$\therefore$ $(A+B)'$ का क्रम $=n\times m$

तथा A' का क्रम $=n\times m$

B' का क्रम $=n\times m$

$\therefore$ $A'+B'$ का क्रम $=n\times m=(A+B)'$ का क्रम

पुनः $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

$=[c_{ij}]_{m\times n}$ जहाँ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$\therefore$ $(A+B)'=[c'_{ij}]_{n\times m}$ जहाँ $c'_{ij}=c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$ ....(1)

$\therefore$ $(A+B)'=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times m}$

Scanned with OKEN Scanner

हल : $A+B=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&1&2\\2&4&1\\1&4&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+4&3+1&1+2\\1+2&3+4&2+1\\1+1&2+4&3+2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6&4&3\\3&7&3\\2&6&5\end{bmatrix}$

इस प्रकार $(A+B)'=\begin{bmatrix}6&3&2\\4&7&6\\3&3&5\end{bmatrix}$ ....(1)

अब $A'=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}, B'=\begin{bmatrix}4&2&1\\1&4&4\\2&1&2\end{bmatrix}$

$A'+B'=\begin{bmatrix}2+4&1+2&1+1\\3+1&3+4&2+4\\1+2&2+1&3+2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6&3&2\\4&7&6\\3&3&5\end{bmatrix}$ ....(2)

(1) और (2) से $(A+B)'=A'+B'$.

उदाहरण 3. यदि $A=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, B=[1\ 2\ 3]$ हो तो $A', B', (AB)'$ और $B'A'$ का मान ज्ञात करो।

हल : $A'=[1\ 3\ 2], B'=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}[1\ 2\ 3]$

$=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\2&4&6\end{bmatrix}$

$\therefore\quad (AB)'=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&4\\3&9&6\end{bmatrix}$

$B'A'=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1\ 3\ 2]$

$=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&4\\3&9&6\end{bmatrix}$

इस प्रकार $(AB')=B'A'$.

प्रश्नावली 22·3

1. सिद्ध करो कि $I'=I$ जहाँ I इकाई आव्यूह है।
2. यदि $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ तो A' का मान बताओ।
3. यदि $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\4&1&2\end{bmatrix}$ तो A' का मान लिखो।
4. यदि $A=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&4\\2&1\end{bmatrix}$ तो दिखाओ कि $(AB)'=B'A'$
5. यदि $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&5&0\\0&5&1\\6&7&2\end{bmatrix}$ तो दिखाओ कि $(AB)'=B'A'$.
6. यदि $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\\2&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&2\\ & \text{[illegible]} & \\1&2&4\end{bmatrix}$ तो $(AB)'$ का मान बताओ। और इस प्रकार सिद्ध करो कि $(AB)'=B'A'$.

22·12. कोन्जूगेट परिवर्त आव्यूह

किसी आव्यूह A का प्रत्येक अवयव यदि उसके समिश्र कोन्जूगेट से बदल दिया जाय तो ऐसा आव्यूह कोन्जूगेट आव्यूह कहलाता है। इसे $\bar{A}$ से निरूपित करते हैं। $\bar{A}$ का परिवर्त A होता है तथा इसे परिवर्त कान्जूगेट या A का ट्रान्जूगेट आव्यूह कहते हैं।

इस प्रकार A का ट्रान्जूगेट$=A^*=(\bar{A})'$

उदाहरण के लिए माना $A=\begin{bmatrix}3+4i&2-7i\\3+8i&7+5i\end{bmatrix}$

तब $\bar{A}=\begin{bmatrix}3-4i&2+7i\\3-8i&7-5i\end{bmatrix}$

$(\bar{A})'=A^*=\begin{bmatrix}3-4i&3-8i\\2+7i&7-5i\end{bmatrix}$

$$=(AI)A^{-1}$$
$$=AA^{-1}$$
$$=I.$$

इसी प्रकार $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B$
$$=B^{-1}(IB)$$
$$=B^{-1}B$$
$$=I$$

अतः $\qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

8. यदि A व्युत्क्रमणीय मेंट्रिक्स है तो
$$(A^{-1})^{-1}=A$$

प्रमाण : $\qquad A(A^{-1})=A^{-1}.A=I$

$\therefore \qquad (A^{-1})^{-1}=A$

9. आव्यूह A के परिवर्त का व्युत्क्रम आव्यूह A के व्युत्क्रम के परिवर्त के बराबर होता है अर्थात्
$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

प्रमाण : $\qquad AA^{-1}=I=A^{-1}A$

$\therefore \qquad (AA^{-1})'=I'=(A^{-1}A)'$

$\therefore \qquad (A^{-1})A'=I=A'(A^{-1})'$

$\therefore \qquad (A^{-1})'=(A')^{-1}$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1. A^{-1} ज्ञात करो जब $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

हल : यहाँ $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8-3=5\neq 0$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{\text{Adj } A}{|A|}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 2. A^{-1} का मान बताओ यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

हल : $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$=1\times(9-16)+2(4-3)+3(4-3)=-7+2+3=-2\neq 0$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-7$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=6$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1$$

$$\therefore\ \text{Adj } A=\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{\text{Adj } A}{|A|}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 3. मान बताओ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$

हल : यहाँ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{vmatrix}=(24-25)+2(15-12)+3(10-12)$

$=-1+6-6=-1\neq 0$

$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}=3,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-2$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-3,$

$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$

$\therefore\ \text{Adj } A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{\text{Adj } A}{|A|}=-\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -0\end{bmatrix}$

उदाहरण 4. यदि $A=\begin{bmatrix}8 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ 1 & 2 & 8\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो।

हल : $A=\begin{bmatrix}8 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ 1 & 2 & 8\end{bmatrix}$

$\therefore\ |A|=8(64-8)-4(16-4)+2(4-8)$

$=8(56)-4(12)+2(-4)$

$=448-48-8$

$=392\neq 0$

$\therefore$ आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8 & 4\\ 2 & 8\end{vmatrix}=56$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-12$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 8\end{vmatrix}=-28$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}8 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix}=62$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}8 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-12$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 8 & 4\end{vmatrix}=0$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}8 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-28$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}8 & 4\\ 2 & 8\end{vmatrix}=56$

$\therefore\ \text{Adj } A=\begin{bmatrix}56 & -28 & 0\\ -12 & 62 & -28\\ -4 & -12 & 56\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{\text{Adj } A}{|A|}=\frac{1}{392}\begin{bmatrix}56 & -28 & 0\\ -12 & 62 & -28\\ -4 & -12 & 56\end{bmatrix}$

उदाहरण 5. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करो।

हल : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix},\ |A|=-2\neq 0$

आव्यूह A का सहखण्ड $=\begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj } A$

$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner